CURRICULUM VITAE

Cognome: Barbieri
Nome: Giuseppina Gerarda
Data di nascita: 19/01/1971
Luogo di nascita: Vietri di Potenza

Laurea in Matematica (Indirizzo Generale) conseguita il 13 luglio 1994 presso l'Università della Basilicata con la votazione di 110/110 e lode.

Vincitrice -con punteggio pieno -di **una borsa del CNR** usufruita dal 1/3/1995 al 14/2/1996 presso il Dipartimento di Matematica e Informatica di Udine.

Dottore di ricerca in Matematica presso l'Università degli Studi di Napoli (XI ciclo). Direttore di ricerca: Prof. Hans Weber.

Ricercatrice confermata in Mat05 del Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche dell'Università degli Studi di Udine dal 3 luglio 2003.

PROGETTI di RICERCA:

- PRIN 1994 Analisi Reale
- PRIN 1995 Analisi Reale
- PRIN 1996 Analisi Reale
- PRIN 1997 Analisi Reale
- PRIN 1999 Metodi e problemi in Analisi Reale
- PRIN 2002 Reticoli uniformi, funzioni modulari, misure fuzzy e applicazioni
- PRIN 2004 Analisi Reale, Teoria della Misura e Applicazioni all'Economia
- GNAMPA 2007 Teoria della misura su strutture non-standard
- PRIN 2010-11 Metodi logici per il trattamento dell'informazione (fine 31 gennaio 2016)
- Progetto SIR 2014 Geometric, analytic and dynamical methods for the study of groups and group rings (fine 30 settembre 2018)

VISITING:

- Visiting (su invito del Professor Klement) presso la Johannes Kepler University Linz nel febbraio del 1998 in occasione del 19th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory
- Visiting (su invito del Professor Mesiar) presso la Slovak University of Technology (STU) Bratislava (Repubblica Slovacca) nell'aprile del 2001
- Visiting presso la Slovak Academy of Sciences, Bratislava (Repubblica Slovacca) nell'aprile del 2002 in occasione del convegno internazionale ISCAM
- Visiting dell'Institut für Algebra und Computermathematik della Technische Universität di Vienna nel marzo 2005 in occasione del Workshop: Selected topics in Topology and Number Theory.

COMUNICAZIONI su invito:

- SCAM Bratislava (Repubblica Slovacca) (20–21 aprile 2001)
- SCAM Bratislava (Repubblica Slovacca) (19–20 aprile 2002)
- SCAM Bratislava (Repubblica Slovacca) (1–12 aprile 2003)
- minisymposium Variational models and transportation problems "9th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems" Gaeta (Italia) (24–28 maggio 2016) dal titolo Dirichlet sets and Arbault sets of the circle group

COMUNICAZIONI:

- CARTEMI Maiori (Italia) (22–26 settembre 1998)
- IQSA Cesena (Italia) (31 marzo– 5 aprile 2001)
- IQSA Vienna (Austria) (1–7 luglio 2002)
- CARTEMI Ischia (Italia) (14–19 luglio 2002)
- UMI Milano (Italia) (8–13 settembre 2003)
- IQSA Malta (9–14 luglio 2006)
- Measure Theory - Edward Marczewski Centennial Conference, Bedlewo, (9–15 settembre 2007)
- UMI Bologna (Italia) (12–17 settembre 2011)

SEMINARI su invito:

- Linz Seminar on Fuzzy Set Theory (Austria) (24 febbraio 1998)
- Salerno (Italia) (28 settembre 2016)

Partecipazione ai Workshops di Teoria della Misura e Analisi Reale (dal 1993 in poi), ai Cartemi (dal 1996 in poi).

ATTIVITÀ DIDATTICA:

Anno accademico 1999/2000:

- corso di esercitazioni di Analisi Matematica I per Ingegneria Civile e Meccanica
- corso di sostegno di Analisi Matematica I per Ingegneria Civile e Meccanica

Anno accademico 2000/2001:

- componente della Commissione per la prova di ammissione alla Facoltà di Ingegneria
- corso propedeutico di matematica di base per Ingegneria Civile e dell'Ambiente e Ingegneria Meccanica
- corso di esercitazioni di Matematica I e Matematica II per Ingegneria Elettronica
- ore di esercitazioni per i corsi di
  Metodi Matematici per l'Ingegneria
  Analisi Matematica II per Ingegneria Civile e Meccanica
  Matematica I per Ingegneria Civile e dell'Ambiente

Anno accademico 2001/2002:

- corso di esercitazioni di Matematica I per Ingegneria Elettronica
- supplenza per il corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria
- corso di esercitazioni di Matematica II per Ingegneria Elettronica e Ingegneria Civile e dell'Ambiente

Anno accademico 2002/2003:

- corso di esercitazioni di Matematica I per Ingegneria Civile, dell'Ambiente e delle Risorse e per Ingegneria Elettronica
- supplenza di un modulo di Matematica I per Ingegneria Civile, dell'Ambiente e delle Risorse
- corso di esercitazioni di Matematica II per Ingegneria Elettronica

Anno accademico 2003/2004:

- corso propedeutico di matematica di base per Ingegneria Elettronica
- corso di esercitazioni di Matematica I per Ingegneria Elettronica
- supplenza di Matematica I per Scienze dell'Architettura
- corso di esercitazioni di Matematica II per Scienze dell'Architettura e per Ingegneria Elettronica

Anno accademico 2004/2005:

- corso di Matematica di base per Ingegneria Elettronica
- corso di esercitazioni di Matematica I e Matematica II per Ingegneria Elettronica
- ore di esercitazioni per i corsi di
  Matematica I per Ingegneria Civile, Ingegneria dell'Ambiente e delle Risorse
  Algebra lineare per Ingegneria Meccanica
  Matematica II per Ingegneria Civile, dell'Ambiente e delle Risorse

Anno accademico 2005/2006:

- corso di Matematica di base per Ingegneria Elettronica
- affidamento di un modulo di Matematica I per Ingegneria Elettronica
- supplenza di Matematica II per Ingegneria Elettronica
- esercitazioni per il corso di
  Matematica II per Ingegneria Civile, dell'Ambiente e delle Risorse

Anno accademico 2006/2007:

- corso di Matematica di base per Ingegneria Elettronica e Gestionale dell'Informazione
- affidamento di un modulo di Matematica I per Ingegneria Elettronica e Gestionale dell'Informazione
- supplenza di Matematica II per Ingegneria Elettronica e Gestionale dell'Informazione

- esercitazioni per i corsi di
  Matematica II per Ingegneria Civile, dell'Ambiente e delle Risorse, Meccanica e Gestionale Industriale.

Anno accademico 2007/2008:

- affidamento di Matematica modulo I per Scienze dell'Architettura
- corso di esercitazioni di Matematica I e II per Ingegneria Elettronica e Gestionale dell'Informazione

Anno accademico 2008/2009:

- componente della Commissione d'aula per la prova di ammissione ai corsi di laurea della Facoltà di Ingegneria
- Matematica di base per Ingegneria elettronica
- Primo modulo di Analisi Matematica per il corso di laurea in Scienze dell'Architettura
- Corso di esercitazioni per Analisi Matematica 1 rivolto agli Ingegneri elettronici

Anno accademico 2009-2010:

- Analisi Matematica 2 per Ingegneria Meccanica.
- Corso di esercitazioni per Analisi Matematica 1 per Ingegneria Elettronica.

Anno accademico 2010-2011:

- Coordinatore per la Matematica di Base.
- Analisi Matematica 2 per Ingegneria Meccanica e per Ingegneria Gestionale.

Partecipazione alle commissioni di esame per tutti i corsi menzionati e per

- Analisi Matematica 1 per Ingegneria Civile, Elettronica e Gestionale
- Matematica 1 per Ingegneria Civile, Elettronica e Gestionale

Anno accademico 2011-2012:

- Componente della commissione d'aula per la prova di ammissione ai corsi di laurea della Facoltà di Ingegneria.
- Corso di Matematica di Base per Ingegneria Gestionale, Elettronica e Meccanica
- Corso di esercitazioni di Analisi Matematica 1 per Ingegneria Elettronica e Gestionale
- Analisi Matematica 2 per Ingegneria Meccanica.

Partecipazione alle commissioni di esame per tutti i corsi menzionati e per

- Analisi Matematica 2 e Matematica 2 per Ingegneria Gestionale.

Anno accademico 2012-2013:

- Componente della commissione d'aula per la prova di ammissione ai corsi di laurea della Facoltà di Ingegneria.

- Corso di esercitazioni di Analisi Matematica 1 per Ingegneria Elettronica e Gestionale
- Analisi Matematica 2 per Ingegneria Meccanica.

Anno accademico 2013-2014:

- Componente della commissione d'aula per la prova di ammissione al corso di studi in Scienze dell'Architettura.
- Analisi Matematica 2 per Ingegneria Elettronica e Gestionale

Anno accademico 2014-2015:

- Analisi Matematica 2 per Ingegneria Elettronica e Gestionale (doppia copertura 258 matricole)

Anno accademico 2015-2016:

- Analisi Matematica 2 per Ingegneria Elettronica e Gestionale (doppia copertura 258 matricole)

Anno accademico 2016-2017:

- Analisi Matematica 2 per Ingegneria Elettronica e Gestionale (doppia copertura 242 matricole)

ALTRE ATTIVITÀ DIDATTICHE:

Supplente temporaneo presso il liceo scientifico E. Fermi di Muro Lucano dal 1/10/1994 al 9/2/1995.

ATTIVITÀ ISTITUZIONALI:

Rappresentante dei ricercatori nel Consiglio Unificato di Ingegneria Elettronica 2000- gennaio 2012

Commissaria Erasmus nel Dipartimento di Matematica e Informatica di Udine dal 2013 a dicembre 2015

Commissaria di concorso per valutazione comparativa per la copertura di n.1 posto di ricercatore universitario di ruolo per il settore scientifico-disciplinare MAT 05 della facoltà di Economia dell'Università degli Studi di Napoli PARTHENOPE (2005)

Commissaria per assegni di ricerca nell'ambito SIR e Commissaria per un co.co.co nell'ambito PRIN (ottobre 2015)

Componente commissione seggio elettorale CNSU (maggio 2016) e commissaria supplente seggio elettorale elezioni studentesche (marzo 2017).

PREMI E RICONOSCIMENTI:

Vincitrice di 2 Procedure di valutazione comparativa per l'attribuzione dell'incentivo "una tantum" di cui all'art. 29, comma 19, L. 240/10.

Friend of IQSA

ATTIVITÀ ORGANIZZATIVE:

Organizzatrice del Workshop on Effect Algebras, Boolean Algebras and Related Topics (Udine, 25–27 gennaio 2016)

PARTECIPAZIONE ALLE ATTIVITÀ di DOTTORATO di RICERCA:

Commissaria per l'esame finale di Dottorato in Matematica e Automatica per l'innovazione scientifica e tecnologica di Palermo (febbraio 2014) e Commissaria supplente per l'esame finale di Dottorato in Matematica dell'Università della Basilicata (febbraio 2016)

AFFILIAZIONI:

Membro di GNAMPA

ALTRE ATTIVITÀ:

Revisore per Mathematical Reviews e Zentralbatt Math.

Ha recensito per Fuzzy Sets and Systems, Soft Computing, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Kybernetika, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, Intern. J. Theoret. Physics, Mathematica Slovaca, Axioms, Far East Journal of Mathematical Sciences, Open Mathematics.

ELENCO delle PUBBLICAZIONI

Contributi in libri

[1] Giuseppina Barbieri e Hans Weber A topological approach to the study of fuzzy measures Functional analysis and economic theory (Samos, 1996), 17–46, Springer, Berlin, 1998.
[2] Giuseppina Barbieri e Hans Weber Measures on clans and on MV-algebras Handbook of measure theory Kluwer Endre Pap editor, 911-945 (2002).

Articoli su riviste

[3] Giuseppina Barbieri e Anna Avallone Range of finitely additive fuzzy measures Fuzzy Sets and Systems 89 no. 2, 231–241 (1997).
[4] Giuseppina Barbieri, Anna Avallone e Raffaella Cilia Control and separating points of modular functions Math. Slovaca 49 no. 2, 155–182 (1999).
[5] Giuseppina Barbieri e Hans Weber A representation theorem and a Lyapunov theorem for T_s-measures: the solution of two problems of Butnariu and Klement J. Math. Anal. Appl. Vol. 244 2, 408–424 (2000).
[6] Giuseppina Barbieri Misure su Δ-ℓ-semigruppi e su MV-algebre Bollettino U.M.I. Serie 8, Vol. III-A, 267–270 (2000).
[7] Giuseppina Barbieri, Maria Antonietta Lepellere e Hans Weber The Hahn decomposition theorem for fuzzy measures and applications Fuzzy sets and systems 118 No. 3, 519–528 (2001).
[8] Giuseppina Barbieri A note on fuzzy measures Journal of Electrical Engineering Vol 52, 67–70 (2001).
[9] Giuseppina Barbieri, Dikran Dikranjan, Chiara Milan e Hans Weber Answer to Raczkowski's quest on convergent sequences of integers Topology and Appl 132/1, 89–101 (2003).
[10] Giuseppina Barbieri e Anna Avallone Lyapunov measures on effect algebras Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 44 3, 389–397 (2003).

[11] Giuseppina Barbieri, Mirko Navara e Hans Weber Characterization of T-measures Soft Computing 8 44–50 (2003).
[12] Giuseppina Barbieri, Anna Avallone e Paolo Vitolo Hahn decomposition of modular measures and applications Commentationes Mathematicae 43 2 149–168 (2003).
[13] Giuseppina Barbieri Lyapunov's theorem for measures on D-posets Intern. J. Physics 43 7/8 1613–1623 (2004).
[14] Giuseppina Barbieri, Dikran Dikranjan, Chiara Milan e Hans Weber Convergent sequences in precompact group topologies Applied General Topology 6 No. 2 (2005) 149–169.
[15] Giuseppina Barbieri, Dikran Dikranjan, Chiara Milan e Hans Weber t-dense subgroups of topological Abelian groups Questions and answers in General Topology vol 24 n.2 (2006), 99–118.
[16] Giuseppina Barbieri, Dikran Dikranjan, Chiara Milan e Hans Weber Topological torsion related to some recursive sequences of integers, Math. Nachr. 281 7, 930–950 (2008).
[17] Giuseppina Barbieri, Anna Avallone e Paolo Vitolo On the Alexandroff decomposition theorem Mathematica Slovaca vol 58 2, 185–200 (2008).
[18] Giuseppina Barbieri, Anna Avallone, Paolo Vitolo e Hans Weber Decomposition of effect algebras and the Hammer-Sobczyk theorem Algebra Universalis 60 1 1–18 (2009).
[19] Giuseppina Barbieri An extension theorem for modular measures on effect algebras Czechoslovak Mathematical Journal 59 3, 702–719 (2009).
[20] Giuseppina Barbieri Convergent regular measures on MV-algebras Kybernetika 46 5 1052–1058 (2009).
[21] Giuseppina Barbieri On Dieudonné's Boundedness Theorem Bollettino UMI II 9, 343–348 (2009).
[22] Giuseppina Barbieri On the Dieudonné theorem Scientiae Mathematicae Japonicae 70 3, 279–284 (2009).
[23] Giuseppina Barbieri, Anna Avallone e Paolo Vitolo "Central elements in pseudo-D-lattices and Hahn decomposition theorem " Bollettino UMI III 3 447–470 (2010).
[24] Giuseppina Barbieri-Antonietta Valente-Hans Weber Decomposition of ℓ-group valued measures Czechoslovak Mathematical Journal 62 4 (2012), 1085–1100.
[25] Giuseppina Barbieri, Anna Avallone e Paolo Vitolo Pseudo-D-lattices and Lyapunov measures, Rendiconti di Palermo 62 2 (2013), 301–314.
[26] Giuseppina Barbieri, Anna Avallone, Paolo Vitolo e Hans Weber, Openness of measures and closedness of their range. Journal of Mathematical Analysis and Applications 404 1 (2013), 57–63.
[27] Giuseppina Barbieri, F.J. García e D. Puglisi, Lineability and spaceability on vector-measure spaces. Studia Math 219 (2) (2013), 155–161.
[28] Giuseppina Barbieri On the extension of measures, Fuzzy Sets and System 244 (2014), 123–129.
[29] Giuseppina Barbieri, F.J. García e D. Puglisi, Addendum to "Lineability and spaceability of vector-measure spaces" Studia Math. 224 (2014), no. 2, 193
[30] Giuseppina Barbieri A note on the Cafiero criterion in effect algebras Ital. J. Pure Appl. Math. 34 (2015), 17–22.
[31] Giuseppina Barbieri, Anna Avallone, Paolo Vitolo e Hans Weber, Decomposition of pseudo D-lattices and the Hammer-Sobczyck decomposition, Order 33 (2016), no. 3, 477–501.
[32] Giuseppina Barbieri, Antonio Boccuto, On extensions of k-subadditive lattice group-valued capacities, Ital. J. Pure Appl. Math. 37 (2017), 387–408.
[33] Giuseppina Barbieri, Anna Giordano Bruno e Hans Weber, Inclusions of characterized subgroups, Topology and its Applications 221 (2017), 534–555.
[34] Giuseppina Barbieri, Dikran Dikranjan, Anna Giordano Bruno e Hans Weber, Dirichlet sets vs Characterized subgroups, Topology and its Applications 231 (2017), 50–76.
[35] Giuseppina Barbieri, Antonio Boccuto, On some properties of k-subadditive lattice group-valued capacities, Mathematica Slovaca, (2017).

Articoli su proceedings

[36] Giuseppina Barbieri, Mirko Navara e Hans Weber "Strict Triangular Norms and Characterization of T-Measures" Contribution to EUSFLAT conference (2001).

Sunto dei lavori

La linea di ricerca condotta si colloca nell'ambito della teoria della misura, più precisamente nell'ambito fuzzy e sue generalizzazioni, e della topologia generale, più precisamente su alcune questioni riguardanti le topologie gruppali precompatte sugli interi e sviluppi correlati.

TEORIA DELLA MISURA

MISURE FUZZY

In **1** si segue un approccio che si rifà ai metodi topologici introdotti da Frèchet e Nikodỳm negli anni 20 e sviluppati negli anni 70 dalla scuola di Orlicz e da Weber. In tali metodi un ruolo chiave è svolto dal fatto che ogni misura su un'algebra di Boole $\mathcal{A}$ genera una topologia $\mathcal{U}$, e in effetti un'uniformità, rispetto alla quale sia la misura stessa che le operazioni di algebra di Boole risultano uniformemente continue. Si studia quindi il gruppo topologico $(\mathcal{A}, \Delta, \mathcal{U})$ e ciò da informazioni sulle proprietà della misura.

Quindi in **1** si sviluppa un approccio topologico per lo studio di misure fuzzy. Per fare ciò si introduce una struttura più generale come dominio delle misure fuzzy: i Δ-ℓ-semigruppi, che contiene la struttura delle MV-algebre.

Una MV-algebra $(L, +, ', 0, 1)$ è un semigruppo commutativo con $0, 1$ e un'operazione unaria $' : L \to L$ tale che per ogni x, $y \in L$ si abbia

$x + 1 = 1$

$x'' = x$

$0' = 1$

$(x' + y)' + y = (x + y')' + x.$

Le MV-algebre hanno trovato applicazione nella logica e nell'economia matematica. Esse sono state introdotte da Chang nel 1958 per sviluppare il calcolo proposizionale basato su logiche a più valori di verità ("MV"sta infatti per "many-valued"). Un clan di insiemi fuzzy è una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni definite su un dato insieme Ω a valori nell'intervallo $[0, 1]$ che contenga la costante 1 e che insieme con le funzioni f e g contenga la funzione $(f - g) \vee 0$: ogni algebra di sottoinsiemi di Ω è un clan di insiemi fuzzy, se si identifica un insieme con la sua funzione caratteristica. Le MV-algebre sono la naturale generalizzazione dei clan di insiemi fuzzy, allo stessso modo in cui le algebre di Boole generalizzano le algebre di insiemi: il quoziente di un clan infatti non è più un clan in generale ma una MV-algebra. I clan di insiemi fuzzy, che sono quindi un caso particolare di MV-algebre, sono stati usati da Butnariu e Klement nella teoria dei giochi cooperativi con coalizioni descritte da fuzzy sets (insiemi "nebulosi"). La teoria dei giochi cooperativi per coalizioni, viste come insiemi "continui"di agenti è stata studiata da Aumann e Shapley in un volume pubblicato nel 1974. A differenza del caso classico in cui le coalizioni si descrivono come crisp sets (insiemi "nitidi") qui un agente può appartenere anche parzialmente a una coalizione, il che si verifica ad esempio nel caso di una società che vi entra solo con una parte del proprio capitale.

L'introduzione dei Δ-ℓ-semigruppi ci permette di trattare simultaneamente misure fuzzy, misure su anelli booleani a valori in un gruppo e operatori lineari su spazi di Riesz.

1 contiene teoremi di decomposizione e di estensione per siffatte misure così come lo studio di MV-algebre connesse, totalmente sconnesse e compatte.

In **2** si studiano misure su clan di insiemi fuzzy e su MV-algebre. Vengono dati teoremi di rappresentazione, di estensione, di decomposizione, di limitatezza per siffatte misure. Il lavoro contiene anche un teorema di decomposizione di MV-algebre complete.

In **7** trattiamo ancora misure su Δ-ℓ-semigruppi, in particolare su MV-algebre. Forniamo il teorema di decomposizione di Hahn per queste misure. Applicando il teorema di Hahn assieme al teorema di Freudenthal (che permette di riguardare ogni MV-algebra come opportuno spazio di funzioni misurabili) si ottengono rapide dimostrazioni di teoremi di rappresentazione integrale. Grazie a questi ultimi e a considerazioni sviluppate in **1, 2** si riportano immediatamente dal contesto booleano a questo contesto le varie versioni del teorema di Lyapunov.

Dieudonné nel 1951 provò :“Se una successione di misure regolari di Borel a valori in uno spazio metrico compatto converge sugli aperti, allora converge ovunque. In questo caso, la successione è uniformemente regolare”. Questo teorema generalizza il teorema di Nikodým secondo cui una successione di misure di Borel converge a una misura di Borel: basta sostituire la puntuale convergenza con l’analoga condizione sugli aperti purché una ipotesi di regolarità e una condizione topologica sul codominio vengano soddisfatte. Brooks generalizzò questo teorema al caso in cui lo spazio è compatto oppure normale e la successione è uniformemente limitata. In **22** diamo una versione generale di questo risultato valida per misure su MV-algebre a valori in un gruppo topologico abeliano.

MISURE FUZZY: T-MISURE

In **5** si risponde ad una questione sollevata da Butnariu e Klement in “Triangular norms and some applications to measure and game theory. Fuzzy approach to reasoning and decision-making”, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992. Essi posero il problema della validità del teorema di Lyapunov per T_s-misure ($s \in (0, +\infty)$). Le T_s-misure basano la loro definizione sul concetto di norma triangolare.

La nozione di “norma triangolare”(brevemente t-norma) fu presentata per la prima volta da Menger per introdurre gli spazi metrici probabilistici in maniera tale che venisse preservata la disuguaglianza triangolare. Una norma triangolare è una funzione $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ associativa, monotona, commutativa con 1 quale elemento neutro. La famiglia T_s, $s \in [0,\infty]$, è una famiglia di t-norme introdotta da Frank. Per maggiori dettagli un’ottima referenza è la monografia di Klement, Mesiar e Pap “Triangular norms”, Kluwer 2000. Sia T un T-clan, cioè un sottoinsieme di $[0,1]^\Omega$, che contiene lo zero ed è chiuso rispetto a T e all’operazione di complementazione (o meglio rispetto alle loro estensioni puntuali) e G un gruppo topologico commutativo. Una T-valutazione (rispetto ad una t-norma) è una funzione $\mu : T \to G$ con $\mu(0) = 0$ tale che

$$\mu(T(f,g)) + \mu(S(f,g)) = \mu(f) + \mu(g)$$

(S è la t-conorma duale rispetto a T). Una T-misura è una T-valutazione σ-continua rispetto all’ordine.

Il punto cruciale è la dimostrazione del teorema di rappresentazione per T_s-misure, $s \in (0,\infty)$. Sulla base di questa rappresentazione e del classico teorema di Lyapunov si ottiene la convessità del codominio per T_s-misure.

In **11** si dà una caratterizzazione delle T-misure definite su tribù debolmente generate e in più una versione del teorema di Lyapunov per suddette misure. Il teorema di rappresentazione contenuto in **11** è una generalizzazione del teorema di rappresentazione contenuto in **5** e del teorema di rappresentazione contenuto nel lavoro di Navara “Characterization of measures based on strict triangular norms”J. Math Anal. Appl. (1999)

Il teorema di LYAPUNOV

Il celebrato teorema di Lyapunov asserisce che il codominio di una misura σ-additiva a valori in uno spazio lineare di dimensione finita definita su una σ-algebra è compatto. Se addizionalmente la misura è nonatomica, il codominio è convesso.

In **3** proviamo il teorema di Lyapunov per misure finitamente additive definite su un clan di insiemi fuzzy a valori in $\mathbb{R}^n$. Proviamo che le stesse misure a valori in spazi B-convessi hanno codominio relativamente convesso.

Il teorema di Lyapunov non è più vero se lo spazio è di dimensione infinita. D’altra parte Knowles ha mostrato che se μ è propriamente iniettiva a valori in uno spazio vettoriale localmente convesso allora il codominio resta convesso. De Lucia e Wright dopo aver introdotto la nozione di un insieme convesso in un gruppo hanno generalizzato il risultato di Knowles al caso di misure a valori in un gruppo. In **10** si generalizza questo risultato a misure definite su effect algebre. Più precisamente proviamo che se $\mu : L \to G$ è una misura modulare σ-additiva chiusa e pseudo non-iniettiva definita su un D-reticolo σ-completo a valori in un gruppo abeliano topologico che non contiene sottogruppi isomorfi a $\mathbb{Z}_2$, allora il suo codominio è convesso.

13 contiene la versione finitamente additiva del teorema di Lyapunov valida per misure definite su effect algebre. Si precisa che la condizione che assicura la convessità del codominio in tale contesto è la forte continuità.

Come nel caso booleano si mostra l'equivalenza tra forte continuità e la nonatomicità sotto l'ipotesi che μ sia una misura σ-additiva definita su una σ-algebra. Invero in **13** sono enunciate le condizioni sul dominio di una misura che garantiscono la convessità del codominio. Così facendo, e.g. incidentalmente **13** contiene anche la versione presentata da Avallone in "Liapunov theorem for modular functions"Proceedings of the International Quantum Structures Association Quantum Structures 94 (Prague) valida per funzioni additive su reticoli complementati.

FUNZIONI MODULARI

Lo studio delle funzioni modulari su reticoli complementati contiene la teoria delle funzioni modulari su reticoli ortomodulari. Si dice che un reticolo L è ortomodulare se ogni elemento $a \in L$ ha un particolare complemento $a^{\perp}$, detto ortocomplemento, che verifica la legge ortomodulare: $a \vee (b \wedge a^{\perp}) = b$ per ogni $b \geq a$; inoltre l'applicazione $a \mapsto a^{\perp}$ è un'involuzione che rovescia l'ordine. Ogni funzione modulare che si annulla in 0 è una misura nel senso che conserva le somme di elementi ortogonali. Un esempio canonico di reticolo ortomodulare è il reticolo dei sottospazi chiusi di uno spazio di Hilbert. Ora tre sottospazi dati verificano la legge distributiva sse le corrispondenti proiezioni commutano a due a due. Ciò spiega perché è invalso l'uso del termine "non-commutativa"per tale teoria in luogo di "non-distributiva"che sarebbe più adatto. Si ricorda che nei reticoli ortomodulari la legge distributiva non è necessariamente verificata, anzi un reticolo ortomodulare è distributivo sse è un'algebra di Boole. I reticoli ortomodulari hanno trovato applicazione in campi diversi come la meccanica quantistica e l'economia matematica. Ad esempio il reticolo dei sottospazi chiusi di uno spazio di Hilbert si può vedere come modello del calcolo proposizionale per teorie come la meccanica quantistica che non obbediscono alla logica classica: quest'idea risale a un articolo di Birkhoff e von Neumann del 1936. Per quanto riguarda l'economia matematica, possiamo citare un articolo di Epstein e Zhang del 2001 in cui pongono le basi per una teoria della probabilità soggettiva su eventi non ambigui. Bisogna a questo punto citare il paradosso di Ellsberg. La seguente versione del paradosso di Ellsberg è dovuta a Zhang. Si estragga una pallina da un'urna che ne contiene 100 di colore azzurro, giallo, rosso o verde, dove si sa che le palline azzurre o gialle sono 50 e le palline azzurre o rosse sono 50. Sulla base delle informazioni a disposizione, gli eventi non ambigui, quelli cioè a cui si può assegnare una probabilità precisa non formano un'algebra di Boole: infatti sono non ambigui sia l'evento $\{A, G\}$ (la pallina estratta è azzurra o gialla) sia l'evento $\{A, R\}$ (la pallina estratta è azzurra o rossa), ma non la loro intersezione l'evento $\{A\}$ (la pallina estratta è azzurra). Pertanto a causa del paradosso di Ellsberg le algebre di Boole non sono adatte come modello per l'insieme degli eventi non ambigui, quindi si utilizza una struttura detta λ-system che è un caso particolare di reticolo ortomodulare.

I risultati principali di **4** sono i seguenti:

Sia L un reticolo complementato o sezionalmente comlementato e X uno spazio lineare localmente convesso completo e di Hausdorff, sia $\mu : L \to X$ una funzione modulare, cioè $\mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b) = \mu(a) + \mu(b)$ per ogni a, $b \in L$. Sia $\mathcal{U}(\mu)$ la più debole uniformità di reticolo su L per cui μ è uniformemente continua. Siano date $\mu_n : L \to X$ funzioni modulari uniformemente esaustive. Allora esiste $\nu : L \to X$ funzione modulare tale che $\mathcal{U}(\nu) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}(\mu_n)$. Questo risultato va confrontato con Drewnowski "Topological rings of sets, continuous set functions, integration", *Bull. Acad. Polon. Sci. Sr. Sci. Math. Astronom. Phys.* (1972) e Basile "Controls of families of finitely additive functions"*Ricerche Mat.* (1986).

Qui l'autore prova il risultato seguente:

Sia X uno spazio lineare localmente convesso completo, sia $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di misure finitamente additive definite su un anello booleano tali che $\mu_n(x_n) \to 0$ per ogni successione disgiunta $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Allora esiste una misura finitamente additiva μ tale che $\mathcal{U}(\mu) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}(\mu_n)$.

Le tecniche usate derivano da Weber "Topological Boolean rings. Decomposition of finitely additive set functions", *Pacific J. Math.* (1984).

Sempre in **4** è provato:

Sia $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni modulari σ-continue rispetto all'ordine nonatomiche definite su un reticolo σ-completo. Allora essa ammette punti separanti.

Questo generalizza un risultato di Basile e Weber "Topological Boolean rings of first and second category. Separating points for a countable family of measures", *Rad. Mat.*(1986).

Questi ultimi autori provano:

Sia $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di misure σ-additive a valori in un gruppo definite su un σ-anello. Allora essa ammette un G_δ-insieme denso di punti separanti.

MISURE MODULARI SUI D-RETICOLI

La teoria delle misure modulari sui D-reticoli unifica la teoria non-commutativa e quella delle misure fuzzy e quindi la teoria classica della misura che sono tra loro incompatibili, nel senso che un reticolo ortomodulare che sia anche una MV-algebra deve essere necessariamente un'algebra di Boole. Per definire un D-reticolo occorre presentare il concetto di effect-algebra, che è stato introdotto da Foulis e Bennett nel 1994 allo scopo di costruire un modello per sistemi quantomeccanici nei quali la misurazione degli osservabili è affetta da un grado non trascurabile di imprecisione. Il modello di Foulis e Bennet, noto come effect-algebra standard è così costruito: sia V lo spazio vettoriale reale degli operatori autoaggiunti su un dato spazio di Hilbert H, ordinato dalla relazione $S < T$ sse $\langle Sx, x\rangle \leq \langle Tx, x\rangle$; l'effect-algebra standard L è costituita da tutti i $T \in V$ tali che $\mathbf{0} \leq T \leq \mathbf{1}$, (dove $\mathbf{0}$ è l'operatore nullo e $\mathbf{1}$ è l'operatore identità). Un'effect algebra è un insieme dotato di una somma $\oplus$ parzialmente definita e due speciali elementi 0 e 1. La somma è commutativa e associativa e 0 è l'unico elemento la cui somma con 1 sia definita; inoltre per ogni elemento a esiste un unico $a^\perp$ detto ortosupplemento o ortocomplemento tale che la somma $a \oplus a^\perp$ è definita e vale 1. Diciamo due elementi a e b sono ortogonali se si possono sommare (in tal caso scriviamo $a \perp b$). In un effect algebra, si può introdurre un'altra operazione parzialmente definita: la differenza che è in qualche modo inversa della somma. Precisamente diciamo che $c \ominus a$ è definita e vale b sse $a \perp b$ e $a \oplus b = c$. Inoltre la somma induce in modo naturale una relazione d'ordine: diciamo che $a \leq c$ sse esiste $b \perp a$ tale che $a \oplus b = c$, cioè se la differenza $c \ominus a$ è definita. Le effect algebre risultano equivalenti ai "D-poset", definiti indipendentemente da Kopka e Chovanec usando come operazione fondamentale la differenza. Chiamiamo D-reticolo un'effect algebra L che sia un reticolo rispetto al suo ordinamento naturale. Un reticolo ortomodulare si può vedere come D-reticolo considerando come unione la somma disgiunta: in tal modo si trova che i reticoli ortomodulari sono tutti e soli i D-reticoli in cui due elementi ortogonali sono sempre disgiunti. Una MV-algebra si può vedere come D-reticolo prendendo a' come ortocomplemento di a: si trova così che le MV-algebre sono tutti e soli i D-reticoli in cui due elementi disgiunti sono sempre ortogonali. Data una funzione definita su un D-reticolo L a valori in un gruppo diciamo al solito che μ è una misura se conserva le somme di elementi ortogonali; in generale una funzione modulare che si annulla in 0 non è necessariamente una misura e d'altro canto non tutte le misure sono modulari: una generalizzazione soddisfacente delle misure sulle algebra di Boole si ottiene considerando quelle funzioni che verificano entrambe le proprietà e che quindi si chiamano misure modulari.

In **12** studiamo misure modulari su D-reticoli. Diamo una caratterizzazione delle misure modulari che ammettono una decomposizione di Hahn e da ciò deriva che le misure modulari continue rispetto all'ordine definite su D-reticoli completi dal punto di vista reticolare sono completamente determinate dai loro valori sul centro (dal punto di vista dei D-reticoli). Come conseguenza otteniamo un isomorfismo tra lo spazio delle misure modulari a valori reali limitate definite su un D-reticolo e lo spazio delle misure completamente additive a valori reali definite su un'algebra booleana. Questi risultati ci permettono di studiare il codominio di misure modulari a valori in uno spazio di Banach. In particolare, proviamo che la chiusura del codominio di misure modulari nonatomiche di variazione limitata a valori in uno spazio di Banach con la proprietà di Radon-Nikodỳm o B-convesso è compatto e convesso. Questo estende un risultato noto per misure su σ-algebre e per funzioni modulari su reticoli complementati.

Nella teoria della misura è consuetudine considerare una proprietà (regolarità, continuità, ecc.) e decomporre una misura data in una parte avente quella proprietà e in un'altra detta singolare oppure ortogonale in cui tale proprietà è assente. Uno di siffatti teoremi è dovuto a A. D. Aleksandrov *Rec. Math. [Mat. Sbornik]* (1941). Problemi di unicità si pongono. In **18** generalizziamo il teorema di Alexandrov per misure modulari su D-reticoli.

Sobczyk e Hammer in Duke Math. J. nel 1944 provarono che una funzione additiva positiva μ si decompone come somma al più numerabile $\mu_0 + \sum \mu_i$ di funzioni additive tali che μ_0 è continua e μ_i sono a due valori dove naturalmente μ_0 può essere zero così come $\mu_1, \mu_2, \ldots$. In **1** si generalizza tale teorema per misure modulari su D-reticoli. Più in generale in **1** è stato ottenuto un teorema di decomposizione algebrica e topologica per D-reticoli. Precisamente si è provato che ogni D-reticolo completo è isomorfo al prodotto di 2 D-reticoli completi e modulari, uno dei quali è senza atomi e l'altro è atomico isomorfo al prodotto di D-reticoli modulari completi e irriducibili. Inoltre, se su di esso esiste una D-topologia continua rispetto all' ordine e di Hausdorff, esso è isomorfo e omeomorfo al prodotto di 2 D-reticoli, uno connesso l' altro totalmente sconnesso. I precedenti risultati sono stati poi generalizzati in **33** agli pseudo-D-reticoli. Ricordiamo che i D-reticoli (o equivalentemente le effect algebre) sono una generalizzazione comune di reticoli ortomodulari e di MV-algebre, e perciò di algebre booleane. Le misure modulari sulle algebre booleane sono esattamente le misure finitamente additive in senso usuale, e perciò tutti i nostri risultati generalizzano i risultati per misure finitamente additive definite su algebre booleane. Gli pseudo-D-reticoli sono tout court i D-reticoli non commutativi .

In **20** offriamo un teorema di estensione per misure modulari vettoriali definite su D-reticoli. In tal modo trasferiamo teoremi riguardanti il codominio, teoremi di controllo, del tipo Vitali-Hahn-Saks e Nikodým. La nota contiene altresì una generalizzazione dei risultati ottenuti da Fischer and Schoeler nel caso booleano e dei risultati ottenuti da Kluvanek riguardanti la chiusura debole del codominio.

Un famoso teorema di Dieudonné asserisce che per spazi metrici compatti la limitatezza sugli aperti di una famiglia di misure di Borel regolari implica l'uniforme limitatezza su tutti gli insiemi di Borel. Questo teorema è stato esteso a spazi localmente compatti e successivamente a spazi di Hausdorff regolari. È da osservare come questo teorema generalizzi il teorema di uniforme limitatezza dovuto a Nikodym per misure a valori reali.

In **21** forniamo una formulazione astratta del teorema di Dieudonné per misure modulari su D-reticoli.

In **19** offriamo un teorema di estensione per misure modulari vettoriali definite su D-reticoli. In tal modo trasferiamo teoremi riguardanti il codominio, teoremi di controllo, del tipo Vitali-Hahn-Saks e Nikodým. Il lavoro contiene altresì una generalizzazione dei risultati ottenuti da Fischer and Schoeler nel caso booleano e dei risultati ottenuti da Kluvanek riguardanti la chiusura debole del codominio.

In **23** consideriamo una pseudo effect algebra E che è la generalizzazione noncommutativa di un'effect algebra introdotta da A. Dvurečenskij e T. Vetterlein in Found. Phys. Lett. 14 (2001). Caratterizziamo gli elementi del centro di E, e quindi stabiliamo un teorema di decomposizione di Hahn per misure modulari su pseudo-D-reticoli (equivalentemente per pseudo effect algebre reticolari). Come conseguenza, un teorema del tipo Uhl è ottenuto che asserisce:" Supponiamo che X sia uno spazio di Banach con la proprietà di Radon-Nikodým e $\mu : L \to X$ una misura modulare definita su uno pseudo-D-reticolo di variazione limitata. Allora $\mu(L)$ è relativamente compatto. Inoltre, se μ è nonatomica, allora $\mu(L)$ è convesso."

In **24** trattiamo teoremi di decomposizione per misure modulari definite su effect algebre a valori in ℓ-gruppi Dedekind completi. Usando il teorema di decomposizione per bande di Riesz otteniamo svariati teoremi di decomposizione, ad esempio deriviamo il teorema di decomposizione di Lebesgue, di Hewitt-Yosida e di Alexandroff e inoltre il teorema di decomposizione di Hammer-Sobczyk.

Un teorema del tipo Cafiero è contenuto in **25**. Questo riguarda condizioni per cui una famiglia di misure esaustive definite su un D-reticolo è uniformemente esaustiva.

In **27** trattiamo il problema dell'estensione di misure su effect algebre a valori in ℓ-gruppi e proviamo che ogni misura definita su un D-reticolo a valori in un ℓ-gruppo può essere estesa in maniera unica al σ-completo D-reticolo generato.

In **28** generalizziamo per misure su D-reticoli questo classico risultato: "Il codominio di una misura nonatomica positiva definita su una σ-algebra è un intervallo chiuso".

In **29** decomponiamo una misura modulare chiusa definita su un'effect algebra come somma di una misura modulare del tipo "Lyapunov" (ossia con codominio convesso) e di una misura modulare "anti-Lyapunov".

FUNZIONI A VALORI IN GRUPPI ORDINATI

In **3** e **5** studiamo funzioni subadditive a valori in gruppi ordinati.

Lo studio delle funzioni a valori in gruppi ordinati trova applicazioni in economia finanziaria, dove, per esempio, le funzioni crescenti sono candidate ad essere interpretate come funzioni di utilità e giocano un ruolo fondamentale nella definizione della dominanza stocastica.

In **5** investighiamo l'assoluta continuità e la singolarità delle funzioni subadditive a valori in gruppi ordinati e proviamo un teorema di decomposizione del tipo Lyapunoff . In **3** estendiamo funzioni subadditive a valori in un gruppo ordinato da un'algebra di insiemi alla σ-algebra generata generalizzando il noto processo di estensione di Caratheodory.

TOPOLOGIA GENERALE

In **9** risolviamo questioni sollevate da Raczkowski in *Topology Appl.* (2002). Contestualizziamo il problema.

Denotiamo con $\mathbb{T}$ il gruppo dei numeri complessi di modulo unitario. È ben noto che il gruppo degli omomorfismi $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{T})$ tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{T}$ è isomorfo a $\mathbb{T}$. Fatta questa identificazione può essere provato che dato un sottogruppo H di $\mathbb{T}$, la più debole topologia τ_H su $\mathbb{Z}$ che rende continui gli elementi di H è una topologia di gruppo precompatta e di Hausdorff. Comfort e Ross in *Fundam. Math.* (1964) provarono che ogni topologia di gruppo precompatta e di Hausdorff è data in questo modo. Perciò è naturale chiedersi quali proprietà di sottogruppi di $\mathbb{T}$ influenzano rispettive proprietà di topologie precompatte su $\mathbb{Z}$. Per esempio, ogni sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ compatto rispetto a $\tau_{\mathbb{T}}$ deve essere finito, come provato da Leptin in *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* (1955); perciò non esistono successioni convergenti non-banali rispetto a $\tau_{\mathbb{T}}$ [cf. Flor *Math. Scand,* (1968)]. Comfort, Trigos-Arrieta e Wu in *Fundam. Math,* (1993) provarono che data una successione $\underline{u} := (u_n)$ in $\mathbb{Z}$, il gruppo degli elementi topologicamente di torsione $t_{\underline{u}}(\mathbb{T}) := \{x \in \mathbb{T} : u_n x \to 0\}$ deve avere misura 0, perciò se H è un sottogruppo non-misurabile di $\mathbb{T}$, allora non possono esserci successioni convergenti rispetto a τ_H non banali. Raczkowski in *Topology Appl.* (2002) generalizzò questi risultati come segue:

(i) Esistono $2^c (c := 2^{\aleph_0})$ sottogruppi di $\mathbb{T}$ non-misurabili, perciò $2^{\mathfrak{c}}$ topologie di gruppo su $\mathbb{Z}$ precompatte e di Hausdorff senza successioni convergenti non banali.

(ii) Esistono $2^{\mathfrak{c}}$ topologie di gruppo precompatte su $\mathbb{Z}$ senza successioni convergenti non banali.

(iii) Se (x_n) è una successione in $\mathbb{Z}$ tale che $x_{n+1}/x_n \geq n+1$, allora esiste una topologia di gruppo su $\mathbb{Z}$ precompatta di peso $\mathfrak{c}$ per cui (x_n) converge.

In **9** proviamo:

(a) (iii) rimane vero se si sostituisce $x_{n+1}/x_n \geq n+1$ con la condizione $x_{n+1}/x_n \to \infty$.

(b) Se x_{n+1}/x_n è limitata, allora la topologia di gruppo precompatta su $\mathbb{Z}$ per cui (x_n) converge deve essere metrizzabile.

(c) Riguardo (i), sotto l'assioma di Martin, esistono $2^{\mathfrak{c}}$ sottogruppi H di $\mathbb{T}$ di misura zero, per cui le topologie τ_H non hanno successioni convergenti non banali.

Recentemente Hart e Kunen in "Limits in function spaces"hanno costruito senza l'assioma di Martin un sottogruppo H di $\mathbb{T}$ di misura zero, per cui la topologia τ_H non ha successioni convergenti non banali.

(c) è stato generalizzato ad una ampia classe di gruppi topologici abeliani in **15**.

In **16** si studia $t_{\underline{u}}(\mathbb{T})$ allorquando $\underline{u}$ è una ricorrenza. Particolare attenzione è dedicata allo studio delle ricorrenze di ordine due, tali cioè da soddisfare la seguente relazione $u_n = a_n u_{n-1} + b_n u_{n-2}$ per $n > 2$ e a_n, b_n, u_1, $u_2 \in \mathbb{N}$. Se $b_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ottiene la ricorrenza correlata allo sviluppo in frazione continua del numero irrazionale

$$\theta = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Tra l'altro **16** contiene risultati che estendono i teoremi principali dei lavori di Kraaikamp e Liardet, Good approximations and continued fractions. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1991) e Larcher, A convergence problem connected with continued fractions. *ibidem* (1988).

In **14** si studia $\sigma_{\underline{u}}$ la più fine topologia gruppale sugli interi per cui u_n converge a zero. Grazie alla dualità di Pontryagin si traducono risultati algebrici contenuti in **16** riguardanti $t_{\underline{u}}(\mathbb{T})$ in risultati topologici riguardanti $\sigma_{\underline{u}} = \tau_{t_{\underline{u}}(\mathbb{T})}$.

Si studiano i sottogruppi caratterizzati.

La teoria dei sottogruppi caratterizzati dei gruppi abeliani topologici ha origine dallo studio del comportamento dinamico delle rotazioni del cerchio unitario $\mathbb{T}$, ed è connessa a problemi di approssimazione diofantea (successioni uniformemente distribuite, successioni di Kronecker, frazioni continue) e con la teoria degli insiemi di convergenza delle serie trigonometriche in analisi armonica (Dirichlet sets, Arbault sets, ecc.). Un'altra motivazione per questa teoria viene dalla nozione di torsione topologica, introdotta nello studio della struttura dei gruppi localmente compatti abeliani.

In **4** e **6** si descrivono i sottogruppi caratterizzati dei gruppi topologici abeliani localmente compatti, con particolare interesse al caso fondamentale di $\mathbb{T}$, anche in relazione ai Dirichlet sets.

Più precisamente, in **4** detto sottogruppo caratterizzato del toro il seguente insieme $t_u(\mathbb{T}) := \{x \in \mathbb{T} : u_n x \to 0\}$ e date due successioni u, v troviamo condizioni di contenimento tra i sottogruppi $t_u(\mathbb{T}), t_v(\mathbb{T})$.

Un sottoinsieme A di $\mathbb{T}$ è detto un Dirichlet set se esiste una successione di interi u tale che $\|u_n x\| \to 0$ uniformemente su A, in tal caso A è contenuto in un sottogruppo caratterizzato $t_u(\mathbb{T}) := \{x \in \mathbb{T} : \ u_n x \to 0\}$. In **6** risolviamo un problema aperto riguardante la descrizione del toro come somma di 2 sottogruppi propri caratterizzati. Inoltre descriviamo tutti i sottogruppi numerabili del toro che hanno questa forma e forniamo una classe di sottogruppi caratterizzati non numerabili che possono descriversi in questo modo.

ANALISI FUNZIONALE

Recentemente Gurariy (1991) ha introdotto la seguente terminologia in spazi di Banach:

un sottoinsieme M è "spaceable" se $M \cup \{0\}$ contiene un sottospazio chiuso di dimensione infinita, "lineable" se $M \cup \{0\}$ contiene un sottospazio di dimensione infinita.

Sia I l'intervallo unitario e denotiamo con $\mathcal{B}$ la σ-algebra dei boreliani di I, sia λ la misura di Lebesgue su I. Dato X spazio di Banach denotiamo con $ca(\mathcal{B}, \lambda, X)$ lo spazio delle misure $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow X$ che sono assolutamente continue rispetto a λ. Dotiamo $ca(\mathcal{B}, \lambda, X)$ della norma fornita dalla variazione totale

$$\|\mu\| = \sup_{A \in \mathcal{B}} \|\mu(A)\|_X.$$

Ricordiamo che la *variazione totale* di una misura è definita come

$$|\mu|(A) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\| \ : \ A_i \text{ disgiunti } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A\}.$$

Si prova l'esistenza di un sottospazio chiuso di dimensione infinita nello spazio delle misure a variazione totale σ-finita, e per lo spazio delle misure vettoriali il cui codominio non è né chiuso né convesso.